第 3 节 含参不等式恒成立问题（★★★☆）

强化训练

1．（★★）存在 $x>0$，使得 $\ln x-ax+2>0$，则实数 a 的取值范围为_____.

答案：$(-\infty,\mathrm{e})$

解法 1：所给不等式的 a 能完全分离出来，先尝试全分离， $\ln x-ax+2>0\Leftrightarrow ax<2+\ln x\Leftrightarrow a<\dfrac{2+\ln x}{x}$，

所以问题等价于存在 $x>0$，使得 $a<\dfrac{2+\ln x}{x}$，故只需求右侧的最大值，可构造函数求导分析，

设 $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=-\dfrac{1+\ln x}{x^2}$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\mathrm{e}^{-1}$， $f'(x)<0\Leftrightarrow x>\mathrm{e}^{-1}$，

从而 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}^{-1})$ 上↗，在 $(\mathrm{e}^{-1},+\infty)$ 上↘，故 $f(x)_{\max}=f(\mathrm{e}^{-1})=\mathrm{e}$，所以 $a<\mathrm{e}$.

解法 2：将 $\ln x-ax+2>0$ 中的 $-ax+2$ 移至右侧，就能作图分析，故也可尝试半分离，

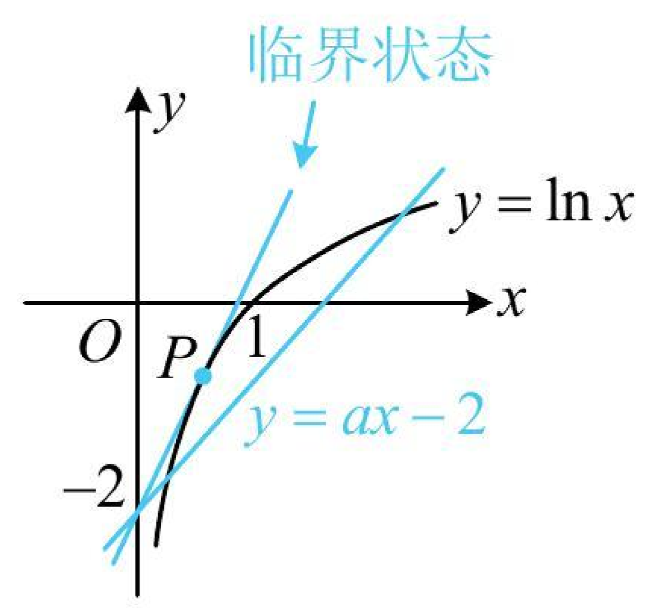
$\ln x-ax+2>0\Leftrightarrow \ln x>ax-2$，如图，临界状态为 $y=ax-2$ 恰与曲线 $y=\ln x$ 相切的情形，先求解此临界状态，直线 $y=ax-2$ 过定点 $(0,-2)$，所以先求出曲线 $y=\ln x$ 过点 $(0,-2)$ 的切线，

设切点为 $P(x_0,\ln x_0)$，因为 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，所以曲线 $y=\ln x$ 在点 P 处的切线方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，

将点 $(0,-2)$ 代入可得： $-2-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(0-x_0)$，解得： $x_0=\mathrm{e}^{-1}$，从而切线的斜率为 e，

由图可知，当且仅当 $a<\mathrm{e}$ 时，曲线 $y=\ln x$ 才有位于直线 $y=ax-2$ 上方的部分，

也即存在 $x>0$，使 $\ln x>ax-2$ 成立，所以 $a<\mathrm{e}$.



2．（2023 • 新高考 II 卷 • ★★★）已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 单调递增，则 a 的最小值为（　　）

（A） e^2　　（B） e　　（C） e^{-1}　　（D） e^{-2}

答案：C

解析： $f(x)$ 的解析式较复杂，不易直接分析单调性，故求导，

由题意， $f'(x)=a\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$，因为 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上↗，所以 $f'(x)\ge 0$ 在 $(1,2)$ 上恒成立，即 $a\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}\ge 0$ ①，

观察发现参数 a 容易全分离，故将其分离出来再看，不等式①等价于 $a \ge \dfrac{1}{xe^x}$，令 $g(x)=xe^x(1<x<2)$，

则 $g'(x)=(x+1)e^x>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上↗，又 $g(1)=e$，$g(2)=2e^2$，所以 $g(x)\in(e,2e^2)$，

故 $\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{xe^x}\in(\dfrac{1}{2e^2},\dfrac{1}{e})$，因为 $a\ge\dfrac{1}{xe^x}$ 在 $(1,2)$ 上恒成立，所以 $a\ge\dfrac{1}{e}=e^{-1}$，故 a 的最小值为 e^{-1}.

3.（2018·天津卷·★★★）已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a-2,x\le 0\\-x^2+2x-2a,x>0\end{cases}$，若对任意的 $x\in[-3,+\infty)$，$f(x)\le|x|$ 恒成立，则 a 的取值范围是_____.

答案： $[\dfrac{1}{8},2]$

解析： $f(x)$ 为分段函数，可分段考虑 $f(x)\le|x|$，参数 a 在常数项上，容易全分离，

当 $-3\le x\le 0$ 时，$f(x)\le|x| \Leftrightarrow x^2+2x+a-2\le -x \Leftrightarrow a\le -x^2-3x+2$，

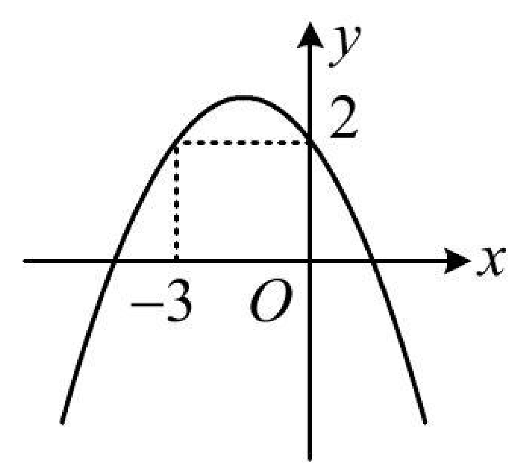
注意到二次函数 $y=-x^2-3x+2$ 的对称轴为 $x=-\dfrac{3}{2}$，如图，

由图可知当 $x=-3$ 或 0 时，$y=-x^2-3x+2$ 取得最小值 2，故 $a\le 2$；

当 $x>0$ 时，$f(x)\le|x| \Leftrightarrow -x^2+2x-2a\le x \Leftrightarrow 2a\ge -x^2+x$，

因为 $-x^2+x=-(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{4}$，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时取等号，所以 $(-x^2+x)_{\max}=\dfrac{1}{4}$，从而 $2a\ge\dfrac{1}{4}$，故 $a\ge\dfrac{1}{8}$；

综上所述，a 的取值范围是 $[\dfrac{1}{8},2]$.



【反思】本题也可用半分离，但图形的运动过程较复杂. 全分离重在“数”，半分离重在“形”，解题时应先尝试预判复杂度，再做出选择，本题显然全分离更简单.

4.（2022·天津模拟·★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}e\ln x,x>0\\e^x,x\le 0\end{cases}$，若不等式 $f(x)\le 2|x-a|$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____.

答案： $[\dfrac{1}{2},\dfrac{e\ln 2}{2}]$

解析： 参数 a 在绝对值里面，不易全分离，考虑直接作图分析，

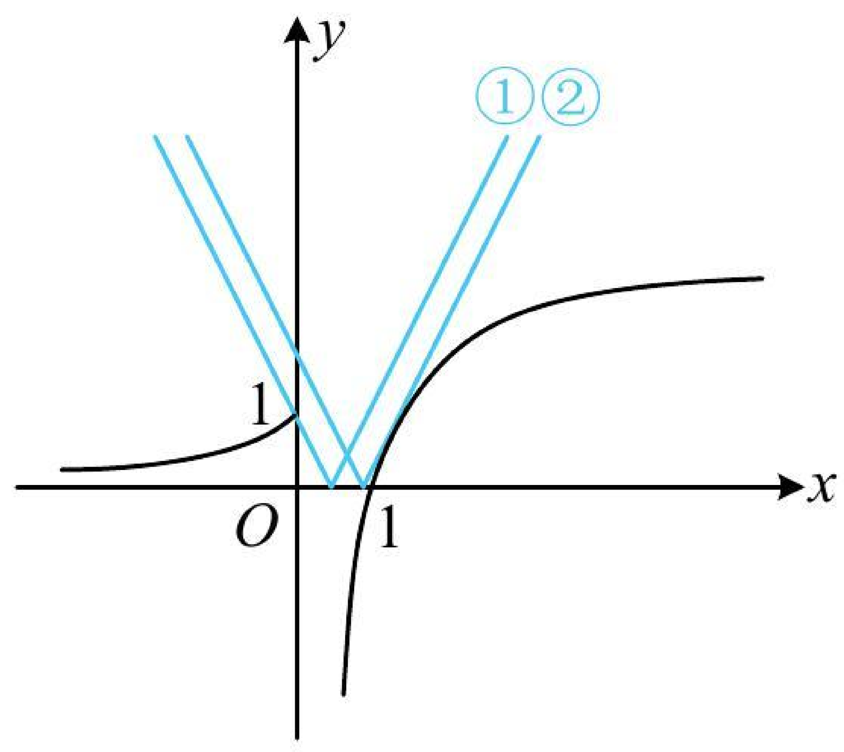
作出 $y=f(x)$ 和 $y=2|x-a|$ 的图象如图，临界状态为图中的①和②，

对于①，折线 $y=2|x-a|$ 左侧部分 $y=2(a-x)$ 过点 $(0,1)$，所以 $1=2(a-0)$，解得：$a=\dfrac{1}{2}$；

对于②，折线 $y=2|x-a|$ 右侧部分 $y=2(x-a)$ 与 $y=e\ln x$ 相切，

因为 $(\mathrm{e}\ln x)'=\frac{\mathrm{e}}{x}$，所以令 $\frac{\mathrm{e}}{x}=2$ 得：$x=\frac{\mathrm{e}}{2}$，故切点为 $(\frac{\mathrm{e}}{2},\mathrm{e}\ln\frac{\mathrm{e}}{2})$，代入 $y=2(x-a)$ 可解得：$a=\frac{\mathrm{e}\ln 2}{2}$；

由图可知，当且仅当 $\frac{1}{2}\le a\le\frac{\mathrm{e}\ln 2}{2}$ 时，$f(x)\le 2|x-a|$ 恒成立，所以 a 的取值范围为 $[\frac{1}{2},\frac{\mathrm{e}\ln 2}{2}]$.



5.（2022・南昌三模・★★★）已知 a 和 x 是正数，若不等式 $x^{\frac{1}{a}}\ge a^{\frac{1}{x}}$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,\frac{1}{\mathrm{e}}]$　（B）$[\frac{1}{\mathrm{e}},1)$　（C）$[\frac{1}{\mathrm{e}},1)\cup(1,\mathrm{e})$　（D）$\{\frac{1}{\mathrm{e}}\}$

答案： D

解析： 原不等式左右两侧均为指数结构，不易直接全分离或半分离，可以考虑先取对数，再全分离，

由题意，$x^{\frac{1}{a}}\ge a^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow \ln x^{\frac{1}{a}}\ge\ln a^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow\frac{1}{a}\ln x\ge\frac{1}{x}\ln a\Leftrightarrow x\ln x\ge a\ln a$，

此时已经全分离了，而且比较巧妙的是左右两侧恰好同构，可构造函数分析，

设 $f(x)=x\ln x(x>0)$，则 $f'(x)=\ln x+1$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{\mathrm{e}}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$，

从而 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)_{\min}=f(\frac{1}{\mathrm{e}})=-\frac{1}{\mathrm{e}}$，

因为 $x\ln x\ge a\ln a$ 恒成立，所以 $f(x)\ge f(a)$，从而 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的最小值，故 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

6.（2023・全国乙卷・★★★★）设 $a\in(0,1)$ 若函数 $f(x)=a^x+(1+a)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是_____.

答案： $[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1)$

解析： 直接分析 $f(x)$ 的单调性不易，可求导来看，

由题意，$f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)$，

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，所以 $f'(x)\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)\ge 0$，

参数 a 较多，没法集中，但 x 只有两处，且观察发现可同除以 a^x 把含 x 的部分集中起来，

所以 $\ln a+\frac{(1+a)^x}{a^x}\ln(1+a)\ge 0$，故 $\ln a+(1+\frac{1}{a})^x\ln(1+a)\ge 0$ ①，

想让式①恒成立，只需左侧最小值 ≥ 0，故分析其单调性，

因为 $1+\frac{1}{a}>1$，$1+a>1$，所以 $\ln(1+a)>0$，

从而 $y=\ln a+(1+\frac{1}{a})^x\ln(1+a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，

故 $\ln a+(1+\frac{1}{a})^x\ln(1+a)>\ln a+(1+\frac{1}{a})^0\ln(1+a)=\ln a+\ln(1+a)$，

所以①恒成立 $\Leftrightarrow \ln a+\ln(1+a)\ge 0$，从而 $\ln[a(1+a)]\ge 0$，

故 $a(1+a)\ge 1$，结合 $0<a<1$ 解得：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\le a<1$.

【反思】有的时候变量不易分离，如本题的 a 和 x，那就不分离，直接变形成易分析的形式来研究函数.

7.（2022·江苏模拟·★★★★）已知函数 $f(x)=\ln x-a(x^2-x)$，若不等式 $f(x)>0$ 有且仅有两个整数解，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$[\frac{\ln 2}{6},\frac{\ln 3}{6})$　　（B）$(\frac{\ln 2}{6},\frac{\ln 3}{6}]$　　（C）$(-\infty,\frac{\ln 2}{6}]$　　（D）$(\frac{\ln 2}{3},\frac{\ln 3}{3})$

答案：A

解法 1：将 $\ln x-a(x^2-x)>0$ 移项就可以半分离，作图分析临界状态，$f(x)>0\Leftrightarrow \ln x>a(x^2-x)$，接下来分析 $y=\ln x$ 和 $y=a(x^2-x)$ 的图象的位置关系，a 的正负影响图象的开口，故先据此讨论，

当 $a=0$ 时，$f(x)>0$ 即为 $\ln x>0$，所以 $x>1$，故整解有无穷多个，不合题意；

当 $a<0$ 时，如图 1，由图可知对任意的 $x>1$，$\ln x>a(x^2-x)$ 都成立，所以整解有无穷多个，不合题意；

当 $a>0$ 时，$y=a(x^2-x)$ 是过定点 $(0,0)$ 和 $(1,0)$，且开口向上的抛物线，

两个临界状态如图 2 中的①和②，（图中只画出了抛物线在 $[1,+\infty)$ 的部分，因为 $(0,1)$ 上没有整数，所以无需考虑这部分）

对于①，函数 $y=a(x^2-x)$ 的图象过点 $(3,\ln 3)$，代入解析式可得 $a=\frac{\ln 3}{6}$；

对于②，函数 $y=a(x^2-x)$ 的图象过点 $(4,\ln 4)$，代入解析可得 $a=\frac{\ln 4}{12}=\frac{\ln 2}{6}$；

由图可知当且仅当 $\frac{\ln 2}{6}\le a<\frac{\ln 3}{6}$ 时，不等式 $\ln x>a(x^2-x)$ 有且仅有 $x=2$ 和 $x=3$ 这两个整数解.

解法 2：本题也可在 $\ln x>a(x^2-x)$ 的两端除以 x，转化为直线绕定点旋转模型来分析，

$f(x)>0\Leftrightarrow \ln x>a(x^2-x)\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}>a(x-1)$，接下来分析 $y=\frac{\ln x}{x}(x>0)$ 和 $y=a(x-1)$ 图象的位置关系，

设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以 $g'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\mathrm{e}$，$g'(x)<0\Leftrightarrow x>\mathrm{e}$，

从而 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上↗，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上↘，且 $g(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，

所以 $g(x)$ 的大致图象如图 3，两个临界状态如图中的①和②，

对于①，直线 $y=a(x-1)$ 过点 $(3,\frac{\ln 3}{3})$，所以 $\frac{\ln 3}{3}=a\cdot(3-1)$，解得：$a=\frac{\ln 3}{6}$；

对于②，直线 $y=a(x-1)$ 过点 $(4,\frac{\ln 2}{2})$，所以 $\frac{\ln 2}{2}=a\cdot(4-1)$，解得：$a=\frac{\ln 2}{6}$；

由图可知当且仅当 $\dfrac{\ln 2}{6} \le a < \dfrac{\ln 3}{6}$ 时，不等式 $\dfrac{\ln x}{x} > a(x-1)$ 有且仅有 $x=2$ 和 $x=3$ 这两个整数解.

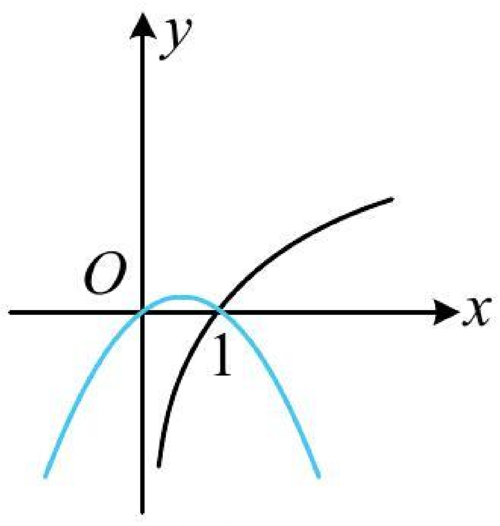


图1

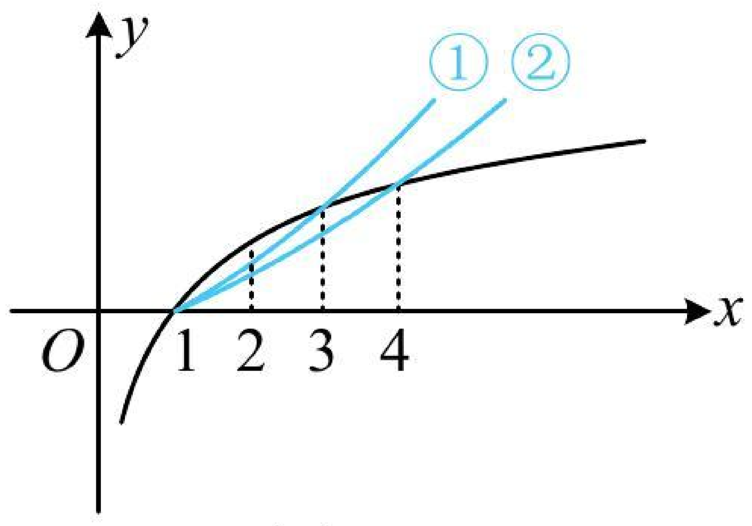


图2

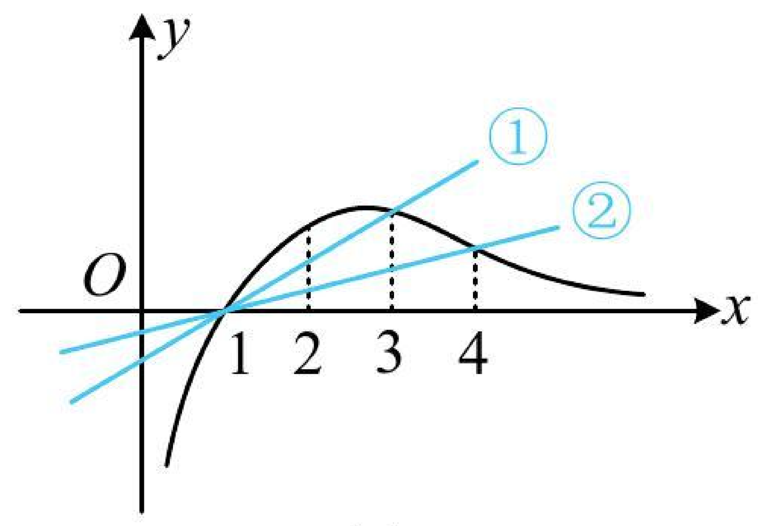


图3